

---

## Lista 6 (27 maja | 3 czerwca)

---

1. Niech  $X$  ma rozkład jednostajny na zbiorze  $\{0, 1, 2, 3\}$ , a  $Y$  na zbiorze  $\{X, \dots, 3\}$ . Obliczyć:
  - (a) entropię  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(X, Y)$ ,
  - (b) wzajemną informację  $I(X; Y)$ ,
  - (c) warunkową entropię  $H(X|Y)$ ,  $H(Y|X)$ ,
  - (d) wzajemną informację warunkową  $I(X; Y|X)$ ,  $I(X; Y|Y)$ .
  - (e) dywergencję Kullbacka-Leiblera  $D_{KL}(X||Y)$ ,  $D_{KL}(Y||X)$ .
2. Niech  $X, Y$  będą dwiema zmiennymi losowymi o rozkładzie charakteryzowanym przez  $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{3}$ . Obliczyć:
  - (a)  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(X, Y)$ ,
  - (b)  $I(X; Y)$ ,
  - (c)  $H(X|Y)$ ,  $H(Y|X)$ ,
  - (d)  $I(X; Y|X)$ ,  $I(X; Y|Y)$ ,
  - (e)  $D_{KL}(X||Y)$ ,  $D_{KL}(Y||X)$ .
3. Niech  $X, Y$  będą dwiema zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami  $\lambda, \mu$  odpowiednio. Obliczyć:
  - (a)  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(X, Y)$ ,
  - (b)  $I(X; Y)$ ,
  - (c)  $H(X|Y)$ ,  $H(Y|X)$ ,
  - (d)  $I(X; Y|X)$ ,  $I(X; Y|Y)$ ,
  - (e)  $D_{KL}(X||Y)$ ,  $D_{KL}(Y||X)$ .
4. Pokazać, że dla dowolnych zmiennych losowych  $X, Y$  zachodzi:
  - (a)  $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$
  - (b)  $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$
  - (c)  $I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$
  - (d)  $I(X; Y) = I(Y; X)$
  - (e)  $I(X; Y) = 0 \iff X, Y$  są niezależne
  - (f)  $H(X|Y) \leq H(X)$
  - (g)  $I(X; Y) \geq 0$
  - (h)  $D_{KL}(X||Y) \geq 0$
  - (i)  $D_{KL}(X||Y) = 0 \iff X = Y$
5. Pokazać, że  $H(X|Y) = 0 \iff X = f(Y)$  dla pewnej funkcji (borelowskiej)  $f$ .
6. Nośnik rozkładu prawdopodobieństwa to zbiór  $\text{supp } X = \{x : P(X = x) > 0\}$ . Niech  $X, Y$  będą takimi zmiennymi losowymi, że  $\text{supp } X \subset \text{supp } Y$ . Co można powiedzieć o skończoności dywergencji Kullbacka-Leiblera?
7. Pokazać, że  $I(X; Y) \geq I(X; g(Y))$  dla dowolnej funkcji  $g$ . Kiedy zachodzi równość? Wywnioskować, że lepiej chodzić na wykład, niż uczyć się z cudzych notatek.