

f

---

## Lista 5 (13 maja | 20 maja)

---

Zakładamy, że łańcuchy Markowa są jednorodnie, tj. mają macierz przejścia. W zadaniach starajcie się znajdować macierze przejścia.

1. Skonstruuj macierz przejścia spaceru losowego na zbiorze  $\{0, \dots, 10\}$ :
  - (a) z barierami elastycznymi (tj. odbijamy się od brzegu),
  - (b) z barierami pochłaniającymi.
2. Czy istnieje łańcuch Markowa, który ma kilka różnych macierzy przejścia?
3. Pokazać przykład łańcucha Markowa  $X_0, X_1, \dots$  i dowolnej funkcji (borelowskiej; jeśli nie wiesz, co to, to i tak będzie borelowska)  $f$ , takich że  $f(X_0), f(X_1), \dots$  nie jest łańcuchem Markowa.
4. Niech  $\langle U_n \rangle$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie,  $\mathbb{P}(U_n = 1) = P(U_n = -1) = \frac{1}{2}$ . Czy łańcuchem Markowa jest:
  - (a)  $A_n = U_n U_{n+1}$ ?
  - (b)  $B_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{2}$ ?
  - (c)  $X_n = U_1 + \dots + U_n$ ?
  - (d)  $Y_n = |X_n|$ ?
  - (e)  $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n) - X_n$ ?
5. W powyższym zadaniu zmieniamy  $\langle U_n \rangle$  na  $\mathbb{P}(U_n = 1) = p, P(U_n = -1) = q, p + q = 1$ .
6. Niech  $X$  i  $Z$  będą łańcuchami Markowa o wartościach całkowitoliczbowych. Czy  $X + Z$  musi być łańcuchem Markowa?
7. W dwóch pudełkach umieszczono  $k$  kul białych i  $k$  kul czarnych, po  $k$  kul w każdym. Przejście pomiędzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy je i odkładamy do pudełek. Znaleźć macierz przejścia takiego łańcucha Markowa. Zauważmy, że cały układ możemy opisać jedną liczbą – liczbą białych kul w pierwszym pudełku.
8. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów monetą, które trzeba wykonać, aby otrzymać sekwencję RORO? A RRRO?
9. Na wyspach Bergamutach każdy człowiek pełni jeden z trzech zawodów: szklarz, zdun lub kowal. Małżonka można poznać jedynie w pracy, a zawód rodziców istotnie wpływa na wybór zawodu przez dziecko. Poniższa tabela określa prawdopodobieństwo, że dziecko wybierze zawód  $i$ , jeśli oboje rodzice pełnią zawód  $j$ .

|         | szklarz | zdun | kowal |
|---------|---------|------|-------|
| szklarz | 0.5     | 0.2  | 0.3   |
| zdun    | 0.1     | 0.7  | 0.2   |
| kowal   | 0.15    | 0.05 | 0.8   |

Czy istnieje taki rozkład populacji, który w następnym pokoleniu nie zmieni się?