

---

**Lista 4 (29 kwietnia | 6 maja)**

---

- 1. Niech  $X$  będzie wynikiem rzutu kostką sześcienną (z możliwymi wynikami 1, 2, 3, 4, 5, 6), zaś  $Y$  wynikiem rzutu monetą (z możliwymi wynikami 0, 1). Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|XY)$ .
0. Niech  $X$  będzie wynikiem rzutu kostką sześcienną (z możliwymi wynikami 0, 1, 2, 3, 4, 5), zaś  $Y$  wynikiem rzutu monetą (z możliwymi wynikami 0, 1). Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|XY)$ .
1. Niech  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem 1. Zmienna  $Y$  ma rozkład Bernoulliego z parametrem  $p$ , przy czym przyjmuje wartość 0 lub  $X$ .
  - (a) Znaleźć  $\mathbb{E}(X|Y)$ .
  - (b) Znaleźć  $\mathbb{E}(Y|X)$ .
2. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech  $X$  oznacza łączną liczbę orłów, zaś  $Y$  liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Znaleźć  $\mathbb{E}(X|Y)$ .
3. Zmienne  $X, Y$  mają rozkład jednostajny na przedziale  $[0, 10]$ .
  - (a) Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X + Y|Y)$ .
  - (b) Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|X + Y)$ .
  - (c) Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|\min(X, Y))$ .
4. Niech  $X, Y$  będą niezależne o rozkładzie Bernoulliego z parametrem  $p$ , a  $Z = \mathbb{1}_{X+Y=0}$ .
  - (a) Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|Z), \mathbb{E}(Y|Z)$ . Czy są niezależne?
  - (b) Wyznaczyć  $\mathbb{E}(Z|X)$ .
  - (c) Wyznaczyć  $\mathbb{E}(Z|X + Y)$ .
  - (d) Wyznaczyć  $\mathbb{E}(Z|XY)$ .
5.  $X, Y$  mają łączną gęstość  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{y}{2x^2} \mathbb{1}_{x \in [1, \infty], y \in [0, 1]}$ . Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$ .
6. Budka z lodami sprzedaje dziennie  $G$  gałek lodów przy temperaturze powietrza równej  $T$ . Zakładając, że temperatura ma rozkład jednostajny na przedziale  $[20, 30]$  a liczba sprzedanych gałek rozkład Poissona o parametrze  $T^2 + T + 1$ , wyznaczyć:
  - (a)  $\mathbb{E}(G|T)$
  - (b)  $\mathbb{E}(G)$ .
7. Pokazać, że  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}Y$ .
8. Pokazać, że jeśli  $\mathbb{E}(Y|X) = c$ , to zmienne  $X, Y$  są nieskorelowane.
9. Górnik utknął w kopalni, przed sobą widzi troje drzwi. Pierwsze wyprowadzą go z kopalni po dwóch godzinach. Drugie prowadzą z powrotem do kopalni trasą trwającą trzy godziny. Trzecie też prowadzą do kopalni, ale pięciogodzinną trasą. Zakładając, że za każdym razem górnik wybiera drzwi losowo, jaka jest wartość oczekiwana czasu, jaki zajmie mu opuszczenie kopalni?
10. Rzucamy monetą o prawdopodobieństwie reszki równym  $p$ . Jaka jest wartość oczekiwana liczby rzutów, jaka będzie potrzebna, by uzyskać  $k$  reszek z rzędu?