

---

**Lista 3 (15 kwietnia | 22 kwietnia)**

---

- 1. Oblicz pochodną funkcji  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ .
- 2. Oblicz pochodną funkcji  $g(x) = e^x \cos(x)$ .
- 3. Oblicz pochodną funkcji  $h(x) = \frac{1}{x^2}$ .
- 4. Oblicz pochodną funkcji  $i(x) = \sin(x^2)$ .
- 5. Oblicz pochodną funkcji  $j(x, y) = x^3 + y^2 + xy$  względem obu zmiennych (czyli najpierw uznając  $x$  za zmienną, a  $y$  za stałą/parametr, a potem odwrotnie). Wyznacz gradient tejże funkcji.
- 6. Oblicz gradient funkcji  $k(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .
- 7. Oblicz gradient funkcji  $l(x, y, z) = \text{ReLU}(e^{xyz})$ .
- 8. Oblicz gradient funkcji  $m(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- 9. Zdefiniujmy parę funkcji  $n_i(x, y) = x^i + y^i$  dla  $i = 1, 2$ . Oblicz gradienty obu funkcji.
- 10. Niech  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ . Oblicz gradienty tej funkcji (dla „górnjej” i „dolnej” funkcji).
- 11. Niech  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Zapisz wartość funkcji  $f(X) = AX$  dla wektora  $X = \langle x, y \rangle^T$  w postaci wektora i oblicz gradienty.
- 12. Niech  $A$  będzie macierzą  $n \times n$  oraz  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle^T$ . Zapisz wartość funkcji  $f(X) = AX$  w postaci wektora i oblicz gradienty.
- 13. Niech  $A$  będzie macierzą  $n \times m$  oraz  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle^T$ . Zapisz wartość funkcji  $f(X) = AX$  w postaci wektora i oblicz gradienty.
- 14. Niech  $A$  będzie macierzą  $n \times m$  oraz  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle^T$ . Zapisz wartość funkcji  $f(X) = X^T A$  w postaci wektora i oblicz gradienty.
- 15. Niech  $A$  będzie macierzą  $n \times m$  oraz  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle^T$ . Zapisz wartość funkcji  $f(X) = X^T A X$  w postaci wektora i oblicz gradienty.
- 16. Znajdź macierz, która wektor  $\langle 1, 0 \rangle^T$  przetrzuca na  $\langle 1, -1 \rangle^T$ , a wektor  $\langle 0, 1 \rangle^T$  na  $\langle 1, 1 \rangle^T$ .
- 17. Znajdź macierz, która wektor  $\langle 1, -1 \rangle^T$  przetrzuca na  $\langle 1, 0 \rangle^T$ , a wektor  $\langle 1, 1 \rangle^T$  na  $\langle 0, 1 \rangle^T$ .
- 18. Znajdź macierz rzutu płaszczyzny na oś poziomą.
- 19. Znajdź macierz rzutu płaszczyzny na prostą o równaniu  $x + y = 0$ . Koniecznie skorzystaj z poprzednich trzech zadań.
- 20. Prosta o równaniu  $3x + 2y = 0$  daje się zapisać jako  $\{tX : t \in \mathbb{R}\}$  dla pewnego wektora  $X$ . Znajdź wektor  $X$ .
- 21. Znajdź wszystkie wektory prostopadłe do wektora  $\langle 2, 7 \rangle^T$ .
- 22. Znajdź macierz rzutu płaszczyzny na prostą o równaniu  $ax + by = 0$ .
- 23. Znajdź macierz, która przetrzuca wektor  $\langle 1, 2 \rangle^T$  na  $\langle 3, 4 \rangle^T$ , a wektor  $\langle 5, 6 \rangle^T$  na  $\langle 7, 8 \rangle^T$ .
- 24. Zdiagonalizuj kilka losowych macierzy.
- 25. Czy istnieje taka macierz  $A$  wymiaru  $2 \times 2$  o wyrazach wymiernych, że  $A \neq I$ , ale  $A^2 = I$ ?
- 26. Czy istnieje taka macierz  $A$  wymiaru  $3 \times 3$  o wyrazach wymiernych, że  $A \neq I$ , ale  $A^3 = I$ ?

- 27.** Znajdź nieidentycznościową macierz  $A$  wymiaru  $5 \times 5$  o wyrazach całkowitych, dla której  $A^n = I$  zachodzi dokładnie wtedy, gdy  $n$  jest wielokrotnością 6.
- 28.** Dane są takie macierze kwadratowe  $A, B$  rozmiaru  $7 \times 7$  o wyrazach rzeczywistych, że macierz  $A$  jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej 7 różnych wyrazów, a ponadto  $AB = BA$ . Dowieść, że macierz  $B$  również jest macierzą diagonalną.
- 29.** Niech  $\mathbf{y}$  będzie wektorem zmiennych prognozowanych, a  $\mathbf{X}$  macierzą zmiennych objaśniających. Chcemy znaleźć wektor współczynników  $\theta$ , który minimalizuje funkcję kosztu  $J(\theta) = \sum (\mathbf{y}_i - \theta^T \mathbf{x}_i)^2$ .
- Jaka jest interpretacja funkcji kosztu  $J(\theta)$ ?
  - Znajdź macierzowy zapis funkcji  $J(\theta)$ .
  - Znajdź gradient funkcji  $J(\theta)$ .
  - Znajdź wektor  $\theta$ , dla którego funkcja  $J(\theta)$  jest minimalna.
  - Czy znaleziony wektor  $\theta$  jest jedyny?