Lista 1 (11 marca | 18 marca)

1. Fabryka produkuje trzy rodzaje wihajstrów. Spośród pierwszego rodzaju 1% jest wadliwych, spośród drugiego 2%, a spośród trzeciego 3%. Wihajstrów pierwszego rodzaju produkowanych jest 45%, drugiego 30%, a trzeciego 25%. Losowo wybrany wihajster okazał się wadliwy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to wihajster pierwszego rodzaju?

2. Student zna odpowiedź na pytanie z prawdopodobieństwem p. Jeśli nie zna, to losuje odpowiedź spośród o możliwych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zna odpowiedź, jeśli odpowiedział poprawnie?

3. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $f(x) = 2x$ na przedziale $[0, 1]$. Czy istnieje taka wartość parametru a, że zmienna losowa $Y = X^a$ ma rozkład jednostajny?

4. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o rozkładzie dwuwymiarowym dany poniższą tablicą:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0.1	0.2	0.1
$X = 1$	0.2	0.0	0.1
$X = 2$	0.1	0.1	0.1

Znajdź rozkłady brzegowe. Czy zmienne X i Y są niezależne? Jest takie pojęcie jak i.i.d. (independent and identically distributed). Czy zmienne X i Y są i.i.d.?

5. Niech X, Y mają łączną gęstość $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6e^{2x+3y} & \text{dla } \langle x, y\rangle \in (-\infty, 0]^2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } \langle x, y\rangle \end{cases}$.

(a) Czy zmienne X i Y są niezależne?

(b) Znajdź $\mathbb{P}(X > Y)$.

6. Niech X, Y mają łączną gęstość równą $6xy$ dla $x \in [0, 1], y \in [0, \sqrt{x}]$, a dla pozostałych argumentów równą 0.

(a) Znajdź rozkłady brzegowe.

(b) Czy zmienne te są niezależne?

(c) Znajdź rozkład warunkowy $f_{X|Y}(x|y)$.

(d) Znajdź rozkład warunkowy $f_{Y|X}(y|x)$.

7. Mówimy, że rozkład ma własność braku pamięci, jeśli dla dowolnych $s, t > 0$ zachodzi $\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

(a) Czy rozkład wykładniczy ma własność braku pamięci?

(b) Załóżmy, że autobusy kursują według rozkładu Poissona z intensywnością λ (tj. liczba autobusów w ciągu jednostki czasu ma rozkład Poissona z parametrem λ). Pokaż, że międzyczasy pomiędzy kolejnymi przyjazdami autobusów są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym.

(c) Załóżmy, że autobusy przyjeżdżają z rozkładem Poissona z intensywnością $\lambda = 0.1$, czyli średnio raz na 10 minut. Jeśli losowo przyjdziesz na przystanek, ile średnio musisz czekać na autobus?

8. Dodatnie zmienne losowe X, Y mają jednakowy rozkład. Czy $\mathbb{E}\frac{X}{X+Y}$ musi być równa $\mathbb{E}\frac{Y}{X+Y}$?

9. Niech X będzie zmienną losową o wartościach naturalnych. Wykaż, że $\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

10. Na uniwersytecie zdawalność analizy matematycznej wśród informatyków jest mniejsza niż wśród matematyków. Na politechnice też. Czy jest możliwym, żeby wśród wrocławskich studentów informatyki była wyższa zdawalność analizy niż wśród wrocławskich studentów matematyki?

11. Dla wielowymiarowego wektora losowego $X = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ nie mówimy o wariancji, tylko o macierzy kowariancji. Jest to macierz Σ, której elementy s_{ij} są równe każdorazowo $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

(a) Wykaż, że macierz kowariancji jest symetryczna.

(b) Wykaż, że macierz kowariancji jest nieujemnie określona, czyli dla każdego wektora liczb rzeczywistych $a = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ liczba $a^T \Sigma a$ jest nieujemna. Zbadaj wartość oczekiwaną iloczynu skalarnego X z a.

(c) Wywnioskuj z poprzednich dwóch podpunktów (i twierdzenia spektralnego), że dla każdej macierzy kowariancji Σ istnieje taka macierz A, że $A^4 = \Sigma$. Trzeba się nie przestraszyć sformułowania twierdzenia spektralnego, a najlepiej o nim czytać na angielskiej Wikipedii.

12. O ruchu Browna musisz wiedzieć, że jest to ciąg zmiennych losowych $B_x, x \geqslant 0$ o własności niezależnych przyrostów normalnych, tj. $B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, s-t)$ i wszystkie takie różnice są niezależne, o ile o siebie nie zahaczają (przy czym $B_0 = 0$). Wyznacz:

(a) $\mathbb{E}(B_t)$,

(b) $\mathrm{Cov}(B_s, B_t)$,

(c) $\mathrm{Var}(B_t)$

(d) $\mathbb{P}(B_1 > 0 \wedge B_2 > 0)$.