

---

## Lista 0 (4 marca)

---

W tym miejscu na następnych listach będą znajdować się linki do materiałów, które warto przeczytać przed rozwiązaniem zadań.

- Rzucamy kolejno dwiema sześciennymi kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsza liczba będzie większa od drugiej?
  - Kostki stały się tysiącścienne. Co wtedy?
  - Losujemy kolejno dwie liczby z przedziału  $[0, 1]$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsza będzie większa od drugiej?
- Oblicz prawdopodobieństwo, że dwie osoby z naszej grupy ćwiczeniowej mają urodziny w tym samym dniu. Stwierz, że wynik jest podejrzanie duży i znajdź takie osoby.
- Losujesz pięć kart ze standardowej talii (bez dzokerów). Wyznacz prawdopodobieństwo otrzymania poszczególnych układów pokerowych. Zadanie nudne, ale wynik jest ciekawy.
- Gramy w grę polegającą na rzucaniu monetą. Każdy rzut kosztuje cię złotówkę. Wyrzucisz reszkę – kasa wypłaca ci dwa złote. Wyrzucisz orła – nie dostajesz nic. Załóżmy, że mamy w portfelu 50 zł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda ci się osiągnąć stan konta równy 200 zł zanim zbankrutujesz? Paradoksalnie zadanie staje się prostsze, gdy zaczniemy od  $n$  zł w portfelu. Gdy  $n = 0$  lub  $n = 200$ , jest łatwo. A dla pozostałych  $n$ -ów?
  - Obok ciebie zjawiała się magiczna wielbłądzica, która chętnie ochroni cię przed bankructwem, pożyczając ci dowolne sumy. Tym niemniej dług trzeba będzie spłacić, zanim ogłosisz zwycięstwo. Jak zmieni się prawdopodobieństwo wygranej?
  - O nie! Moneta okazała się oszukana! Reszkę wyrzucasz z prawdopodobieństwem  $p \in [0, 1]$ , a orła z prawdopodobieństwem  $1 - p$ . Co wtedy? Czy magiczna wielbłądzica będzie w stanie ci pomóc?
- Na nieskończoną szachownicę upuszczamy z dużej wysokości igłę, której długość jest dokładnie równa długości boku kwadracika szachownicy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła dotknie którejkolwiek poziomej prostej rozgraniczającej kwadraciki? To się nazywa igła Buffona, ale nie ściągamy z internetu, bo to niemiłe i bez sensu.
- Wykaż, że zdarzenia  $E$  i  $F$  są niezależne dokładnie wtedy, gdy zdarzenia  $E$  i  $F^c$  są niezależne.
- Założmy, że  $\mathbb{E}[X] = 4$ . Wyznacz wszystkie możliwe wartości  $\mathbb{E}[X^2]$ ?
- Niech  $\mathbb{P}(x = 0, y = 1) = \mathbb{P}(x = 0, y = -1) = \mathbb{P}(x = 1, y = 0) = \mathbb{P}(x = -1, y = 0) = \frac{1}{4}$ . Czy zmienne te są skorelowane? Czy są niezależne?
- Wykaż, że istotnie  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ .
- Losujemy  $X, Y$  jednostajnie z przedziału  $[0, 1]$ . Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej  $\min(X, Y)$ .